

二维波达方向估计的非酉联合对角化方法

聂卫科, 冯大政, 刘建强

(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室, 710071, 西安)

摘要: 针对高斯白噪声中的二维角度估计问题, 提出一种非酉联合对角化方法. 该方法利用平移不变结构阵列信号子空间的旋转不变性, 构造一组具有对角结构的空时相关矩阵, 通过降维相关矩阵组的联合对角化, 估计出阵列导向矢量矩阵, 实现二维波达方向估计, 所得二维角度能自动配对. 该方法的计算量小于交替列对角化中心(ACDC)算法, 且由于每步迭代具有精确的最小二乘闭式解, 消除了 ACDC 算法的误差积累问题, 其估计精度比二维旋转不变子空间方法和 ACDC 算法至少高 5 dB 和 2 dB.

关键词: 波达方向; 联合对角化; 阵列信号处理

中图分类号: TN911.7 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2008)06-0747-04

Non-Unitary Joint Diagonalization Method for Estimating Two-Dimension Direction of Arrival

NIE Weike, FENG Dazheng, LIU Jianqiang

(National Laboratory Lab for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: A non-unitary joint diagonalization method was proposed to estimate the two-dimension (2D) direction of arrival (DOA) embedded in additive Gaussian noise. Using the rotational invariance property among signal subspace induced by an array of sensors with a displacement invariance structure, a set of spatio-temporal correlation matrices which possess diagonal structure were introduced. By implementing the joint-diagonalization of dimension-reduction correlation matrices, the array response matrix was obtained and the 2D DOA can be achieved. The computational complexity of the proposed iterative algorithm is lower than the alternating columns diagonal centers (ACDC) algorithm and the 2D DOA can be paired automatically. Since each iteration step of the proposed algorithm poses a typical least square problem having a unique closed solution, there is no error accumulation as the ACDC algorithm. Simulations show that the estimation performance of the proposed algorithm is at least higher than the 2D estimation of signal parameters via rotational invariance techniques and ACDC algorithm with 5 dB and 2 dB, respectively.

Keywords: direction of arrival; joint diagonalization; array signal processing

二维波达方向(DOA)估计能提取更多空间信息, 提高信号分选和目标识别概率. 多重信号分类(MUSIC)算法^[1]是高分辨二维 DOA 估计的经典算法, 它需要二维谱峰穷尽搜索, 计算量庞大, 且需要进行参数配对. 本文针对具有平移不变子阵的平

面阵列, 基于 2 个相关矩阵并结合旋转不变子空间(ESPRIT)思想^[2-3]提出一种 2D ESPRIT 方法, 将 2 个相关矩阵扩展成矩阵组, 利用交替列对角化中心(ACDC)算法^[4]实现矩阵组的联合对角化, 求解二维波达方向, 提高了估计精度. 然而, ACDC 算法计

算量较大,且本列计算误差必然对下列造成误差积累.针对此缺点,本文又提出一种非酉联合对角化算法,该算法建立降维阵列响应矩阵的二次代价函数,计算量相对 ACDC 算法明显降低,每步迭代具有精确的最小二乘闭式解,不存在误差积累,进一步提高了估计精度,所得的二维角度也能自动配对.

1 信号模型

考虑 P 个远场窄带信号入射到含 $2M$ 个阵元的平面阵,它由 2 个具有相同结构的子阵组成,子阵为含 M 个阵元的任意平面阵.子阵间距为 (η_x, η_y) . 设第 p 个信源的波达方向为 (α_p, β_p) , α_p 和 β_p 分别为方位角和俯仰角,阵元 m 在 xoy 面上的坐标为 (x_m, y_m) ,阵列结构如图 1 所示. 设 s_p 为第 p 个信源复包络, n_m 为第 m 个阵元上的 0 均值复高斯白噪声,则第 t 次采样第 1 个子阵的输出数据矢量为

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_1(t) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{A}_1 \in \mathbf{C}_{M, P}$, 其第 m 行 p 列元素 a_{mp} 为

$$a_{mp} = \exp[-j2\pi(x_m \cos \alpha_p \cdot \sin \beta_p + y_m \sin \alpha_p \sin \beta_p) / \lambda] \quad (2)$$

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_P(t)]^T \quad (3)$$

$$\mathbf{n}_1(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T \quad (4)$$

第 t 次采样第 2 个子阵的输出数据矢量为

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{A}_1 \Phi \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_2(t) \quad (5)$$

式中

$$\Phi = \text{diag}[\mu_1, \dots, \mu_p, \dots, \mu_P] \quad (6)$$

$$\mu_p = \exp[-j2\pi(\eta_x \cos \alpha_p \cdot \sin \beta_p + \eta_y \sin \alpha_p \sin \beta_p) / \lambda] \quad (7)$$

$$\mathbf{n}_2(t) = [n_{M+1}(t), n_{M+2}(t), \dots, n_{2M}(t)]^T \quad (8)$$

如果用 $\mathbf{R}_{ij}^{(k)}$ ($i, j=1, 2$) 表示第 i 个子阵和第 j 个子阵在延迟 k 的二阶相关矩阵, 则

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}_{ij}^{(k)} &= \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^H [\mathbf{B}_j^{(k)}]^H \\ i, j &= 1, 2 \quad k \neq 0 \quad k = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中: $\mathbf{A}_1 = \mathbf{I}$; $\mathbf{A}_2 = \Phi$; $\mathbf{B}_j^{(k)} = \mathbf{A}_j \mathbf{R}_s^H(k)$; $\mathbf{R}_s(k) =$

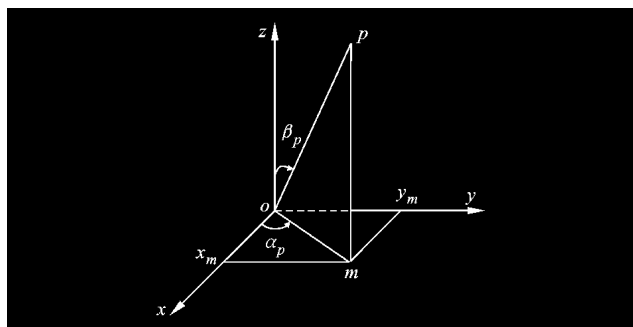


图1 阵列结构

$2E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t+k)]$, E 为数学期望. 设矩阵 $\Psi = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \mathbf{R}_{ij}^{(k)} [\mathbf{R}_{ij}^{(k)}]^H$, Ψ 的奇异值分解 $\Psi = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^H$, 取 Ψ 的主特征矢量组成的矩阵为降维矩阵 $\mathbf{F}$, 对式 (9) 左乘 $\mathbf{F}^H$, 右乘 $\mathbf{F}$, 得到降维矩阵组为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_j^{(k)} &= \tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{A}_i [\tilde{\mathbf{B}}_j^{(k)}]^H \\ k &\neq 0 \quad i, j = 1, 2 \quad k = 1, \dots, K \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中: $\tilde{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{F}^H \mathbf{A}_1$; $\tilde{\mathbf{B}}_j^{(k)} = \mathbf{F}^H \mathbf{B}_j^{(k)}$.

2 2D ESPRIT 算法

首先提出一种 2D ESPRIT 方法. 将式 (10) 中

$$\tilde{\mathbf{R}}_1^{(1)}, \tilde{\mathbf{R}}_2^{(1)} \text{ 上下层叠成矩阵 } \mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_1 [\tilde{\mathbf{B}}_1^{(1)}]^H \\ \tilde{\mathbf{A}}_1 \Phi [\tilde{\mathbf{B}}_1^{(1)}]^H \end{bmatrix}, \text{ 对 } \mathbf{R}_c$$

进行奇异值分解得到

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{U}_1 \Sigma_1 \mathbf{V}_1^H \quad (11)$$

设 $\mathbf{U}_1 = [\mathbf{U}_2 \mathbf{U}_3]$, $\mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3$ 为 $\mathbf{U}_1$ 的前、后 P 列形成的

矩阵, $\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_4 \\ \mathbf{U}_5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U}_4, \mathbf{U}_5$ 为 $\mathbf{U}_2$ 的上、下 P 行形成的

矩阵, 那么 4 个矩阵 $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_1 \\ \tilde{\mathbf{A}}_1 \Phi \end{bmatrix}$, $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$ 和 $\begin{bmatrix} \mathbf{U}_4 \\ \mathbf{U}_5 \end{bmatrix}$ 张成相

同的列空间. 由文献 [5] 的定理 2.3 知, 存在满秩矩阵 $\mathbf{T}$ 使 $\tilde{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{U}_4 \mathbf{T}$ 和 $\tilde{\mathbf{A}}_1 \Phi = \mathbf{U}_5 \mathbf{T}$ 成立, 由此得 $\mathbf{U}_4^{-1} \mathbf{U}_5 = \mathbf{T} \Phi \mathbf{T}^{-1}$, 说明 $\mathbf{T}$ 可由 $\mathbf{U}_4^{-1} \mathbf{U}_5$ 的特征值分解得到, 得到 $\mathbf{T}$ 后可求出 $\tilde{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{U}_4 \mathbf{T}$. 令上角标 # 表示广义逆, 进而得到

$$\hat{\mathbf{A}}_1 = (\mathbf{F}^H)^{\#} \tilde{\mathbf{A}}_1 \quad (12)$$

然后利用本文式 (21) 和式 (22) 计算二维角度.

3 非酉联合对角化算法

我们通过迭代算法寻找左、右对角化因子矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}_1, \mathbf{B}_j^{(k)}$ 和一组对角矩阵 $\mathbf{A}_i$ 使得下式尽可能小,

$$\left. \begin{aligned} J &= \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left\| \tilde{\mathbf{R}}_j^{(k)} - \tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{A}_i [\mathbf{B}_j^{(k)}]^H \right\|_F^2 \\ \| \mathbf{a}_r \|^2 &= 1 \quad \| \mathbf{b}_{jr} \|^2 = 1 \quad r = 1, \dots, P \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中: $\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_{jr}$ 分别表示 $\tilde{\mathbf{A}}_1, \mathbf{B}_j^{(k)}$ 的第 r 个列向量; $\| \cdot \|_F^2$ 表示 F 范数的平方. 以第 l 步迭代为例, 非酉联合对角化算法的步骤如下.

首先, 固定 $\tilde{\mathbf{A}}_1(l-1)$ 和 $\mathbf{B}_j^{(k)}(l-1)$, 约束 $\hat{\mathbf{A}}_1(l) = \mathbf{I}$, 代价函数 $J(\tilde{\mathbf{R}}_j^{(k)}, \tilde{\mathbf{A}}_1, \mathbf{A}_i, \mathbf{B}_j^{(k)})$ 关于 $\mathbf{A}_i$ 求导并令导数为 0, 求得

$$\hat{\mathbf{A}}_2(l) = \text{diag}\{[\mathbf{U}(l-1)]^{-1} \mathbf{v}(l-1)\} \quad (14)$$

式中: $\mathbf{U}(l-1) \in \mathbf{C}_{P, P}$, 其 (r, m) 元素 u_{rm} 为 $\mathbf{a}_r^H(l-1)$

1) $\mathbf{a}_m(l-1) \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^2 [(\mathbf{b}_{jm}^{(k)}(l-1))^H \mathbf{b}_{jr}^{(k)}(l-1)]$;
 $\mathbf{v}(l-1) \in \mathbf{C}_{P,1}$, 其第 r 个元素 v_r 为 $-\mathbf{a}_r^H(l-1)$
 1) $\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^2 [\tilde{\mathbf{R}}_{2j}^{(k)} \mathbf{b}_{jr}^{(k)}(l-1)]$. 其次, 固定 $\tilde{\mathbf{B}}_j^{(k)}(l-1)$ 和 $\mathbf{A}_i(l)$, 代价函数 $J(\tilde{\mathbf{R}}_{ij}^{(k)}, \tilde{\mathbf{A}}_1(l), \mathbf{A}_i(l), \tilde{\mathbf{B}}_j^{(k)}(l-1))$ 关于 $\tilde{\mathbf{A}}_1(l)$ 求导并令导数为 0, 得到 $\tilde{\mathbf{A}}_1(l)$ 的估计

$$\hat{\mathbf{A}}_1(l) = \left\{ \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [(\tilde{\mathbf{R}}_{ij}^{(k)})^H \tilde{\mathbf{B}}_j^{(k)}(l-1) \mathbf{A}_i^*(l)] \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^2 \mathbf{A}_i(l) \left[\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^2 (\tilde{\mathbf{B}}_j^{(k)}(l-1))^H \tilde{\mathbf{B}}_j^{(k)}(l-1) \right] \mathbf{A}_i^*(l) \right\}^{-1} \quad (15)$$

最后固定 $\tilde{\mathbf{A}}_1(l)$ 和 $\mathbf{A}_i(l)$, 代价函数 $J(\tilde{\mathbf{R}}_{ij}^{(k)}, \tilde{\mathbf{A}}_1(l), \mathbf{A}_i(l), \tilde{\mathbf{B}}_j^{(k)}(l))$ 关于 $\tilde{\mathbf{B}}_j^{(k)}(l)$ 求导并令导数为 0, 得到 $\tilde{\mathbf{B}}_j^{(k)}(l)$ 的估计

$$\hat{\mathbf{B}}_j^{(k)}(l) = \left\{ \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 [(\tilde{\mathbf{R}}_{ij}^{(k)})^H \tilde{\mathbf{A}}_1(l) \mathbf{A}_i(l)] \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^2 \mathbf{A}_i^*(l) [\tilde{\mathbf{A}}_1(l)^H \tilde{\mathbf{A}}_1(l)] \mathbf{A}_i(l) \right\}^{-1} \quad (16)$$

以上 3 步交替计算, 算法收敛时, 得到对角化因子

矩阵及对角矩阵的估计 $\hat{\mathbf{A}}_1$, $\hat{\mathbf{B}}_j^{(k)}$ 和 $\hat{\mathbf{A}}_i$. 那么导向矢量矩阵的估计

$$\hat{\mathbf{A}}_1 = (\mathbf{I}^H)^{\#} \hat{\mathbf{A}}_1 \quad (17)$$

设 $\hat{a}_{m,p}$ 为 $\hat{\mathbf{A}}_1$ 的第 (m, p) 元素, 那么有

$$\arg(\hat{a}_{m,p}/\hat{a}_{m+1,p}) = \frac{2\pi}{\lambda} [(x_{m+1} - x_m) \cdot \cos \hat{\alpha}_p \sin \hat{\beta}_p + (y_{m+1} - y_m) \sin \hat{\alpha}_p \sin \hat{\beta}_p] \quad (18)$$

对 $\hat{\mathbf{A}}_1$ 的第 p 列有 $M-1$ 个上述方程, 构造矩阵方程如下

$$\mathbf{X} \mathbf{Y}_p = \mathbf{Z}_p \quad (19)$$

式中: $\mathbf{Z}_p \in \mathbf{C}_{M-1,1}$, 其第 i 个元素为 $\arg(\hat{a}_{i,p}/\hat{a}_{i+1,p})$; $\mathbf{X} \in \mathbf{C}_{M-1,2}$, 其第 i 行 j 列元素为 $2\pi[(2-j)(x_{i+1} - x_i) + (j-1)(y_{i+1} - y_i)]/\lambda$; $\mathbf{Y}_p \in \mathbf{C}_{2,1}$, $\mathbf{Y}_p(i, j)$ 表示 $\mathbf{Y}_p$ 的第 i 行 j 列元素, $\mathbf{Y}_p(1, 1) = \cos \hat{\alpha}_p \sin \hat{\beta}_p$, $\mathbf{Y}_p(2, 1) = \sin \hat{\alpha}_p \sin \hat{\beta}_p$, $\mathbf{Y}_p$ 的最小二乘解为

$$\mathbf{Y}_p = (\mathbf{X}^H \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^H \mathbf{Z}_p \quad (20)$$

得到二维波达方向的估计为

$$\hat{\alpha}_p = \arctan[\mathbf{Y}_p(2, 1)/\mathbf{Y}_p(1, 1)] \quad (21)$$

$$\hat{\beta}_p = \arcsin[\mathbf{Y}_p^2(1, 1) + \mathbf{Y}_p^2(2, 1)]^{1/2} \quad (22)$$

$p=1, 2, \dots, P$, 方位角 $\hat{\alpha}_p$ 和对应的俯仰角 $\hat{\beta}_p$ 都出自 $\hat{\mathbf{A}}_1$ 的第 p 列, 因此二维波达方向能自动配对.

4 计算量分析

算法运行所需的乘除数(MDN)是衡量其计算

量的常用标准. ACDC 算法每步迭代所需的 MDN 为 $(4 + \frac{1}{3})LP^3 + 3P^{4[6]}$. 本文算法计算量分析如表 1 所示.

表 1 本文算法每步迭代计算量

公式($k=1, \dots, K; r, m=1, \dots, P$)	MDN
$\mathbf{v}_r(l-1)$	$2KP^3 + P^2$
$um(l-1)$	$2KP^3 + P^3 + P^2$
$\text{diag}\{[\mathbf{U}(l-1)]^{-1} \mathbf{v}(l-1)\}$	$P^2 + (2/3)P^3$
$\{\sum_{i=1}^2 \mathbf{A}_i(l) [\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^2 (\tilde{\mathbf{B}}_j^{(k)})^H \tilde{\mathbf{B}}_j^{(k)}(l-1) \mathbf{A}_i^*(l)]\}$	$2KP^3 + 2P^2$
$(l-1)^H \tilde{\mathbf{B}}_j^{(k)}(l-1) \mathbf{A}_i^*(l)^{-1}$	P^3
$\{\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [(\tilde{\mathbf{R}}_{ij}^{(k)})^H \tilde{\mathbf{B}}_j^{(k)}(l-1) \mathbf{A}_i^*(l)]\}$	$4KP^3 + P^2$
$\hat{\mathbf{A}}_1(l)$	P^3
$\sum_{i=1}^2 \mathbf{A}_i^*(l) [\tilde{\mathbf{A}}_1(l)^H \tilde{\mathbf{A}}_1(l)] \mathbf{A}_i(l)$	$(5/3)P^3 + 2P^2$
$\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [(\tilde{\mathbf{R}}_{ij}^{(k)})^H \tilde{\mathbf{A}}_1(l) \mathbf{A}_i(l)]$	$K(4P^3 + P^2)$
$\hat{\mathbf{B}}_j^{(k)}(l)$	$2KP^3$

由式(9)知相关矩阵个数 $L=4K$, 忽略低阶 $O(KP^3)$, 本文算法每步迭代所需的计算量为 $4LP^3$, 明显小于 ACDC 算法.

5 仿真实验

取 $M=13, K=4$, 窄带信源 1、2、3 分别以 $(35^\circ, 40^\circ), (35^\circ, 30^\circ), (55^\circ, 30^\circ)$ 入射. 各实验均取 100 次 Monte Carlo 独立实验平均结果.

实验 1 比较 ACDC 算法和本文算法的计算效率. Matlab 程序均在配置为 3 GHz Pentium 4 CPU、内存为 512 MB 的同一台 PC 上运行. 表 2 给出了收敛所耗时间与信噪比的关系.

表 2 不同信噪比下各算法的收敛耗时

算法	收敛耗时/s						
	0 dB	5 dB	10 dB	15 dB	20 dB	25 dB	30 dB
本文	0.88	0.85	0.71	0.54	0.51	0.45	0.38
ACDC	1.18	1.16	1.12	0.87	0.78	0.70	0.62

实验 2 定义 $\hat{\alpha}_p(n)$ 和 $\hat{\beta}_p(n)$ 分别为第 n 次实验对第 p 个信源方位角和俯仰角的估计, α_p 和 β_p 为对应真值, 角度估计的均方误差为

$$E_{MS} = E[(\hat{\alpha}_p(n) - \alpha_p)^2 + (\hat{\beta}_p(n) - \beta_p)^2] \quad (23)$$

图 2 为 500 次快拍下角度估计的均方误差随信噪比的变化曲线, 图 3 为 10 dB 信噪比下角度估计

的均方误差随采样数的变化曲线. 由图2和图3可以看出, 与其他几种算法相比, 本文算法均具有较好的性能. 这是由于本文算法求多个矩阵的平均特征结构估计波达方向, 没有误差积累.

实验3 在10 dB信噪比下, 100次独立实验的本文算法、ACDC算法、2D ESPRIT算法估计的二维角度分布见图4. 由图4可见, 本文估计的二维角度更集中地分布在真实值附近, 具有更小的方差.

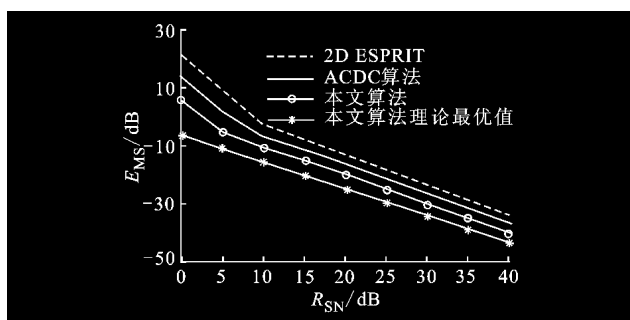


图2 角度均方误差随信噪比变化

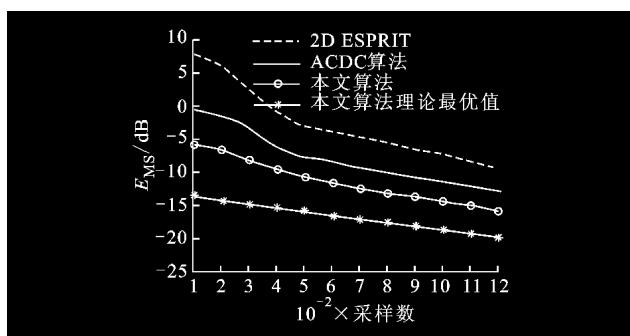
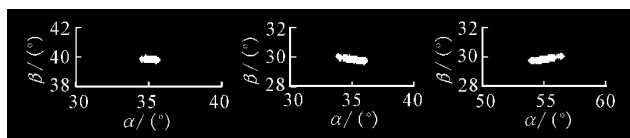
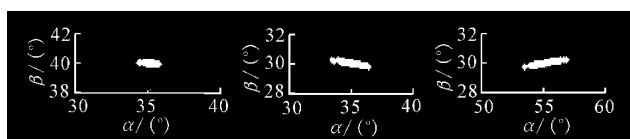


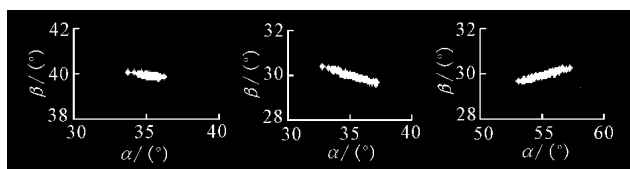
图3 角度均方误差随采样数的变化



(a)本文算法估计的信源1 (b)本文算法估计的信源2 (c)本文算法估计的信源3



(d)ACDC算法估计的信源1 (e)ACDC算法估计的信源2 (f)ACDC算法估计的信源3



(g)2D ESPRIT算法估计的信源1 (h)2D ESPRIT算法估计的信源2 (i)2D ESPRIT算法估计的信源3

图4 各算法估计的二维角度分布

6 结论

误差积累是制约 ACDC 算法性能的瓶颈, 为消除误差积累, 本文提出一种非酉联合对角化方法估计二维波达方向, 本质上将 ESPRIT 的适定问题转化为超定问题求解, 因而具有更好的稳健性. 仿真实验表明, 本文算法在不同信噪比和采样数下性能得到了不同程度的提高, 在低信噪比和小采样数下的性能提高显著.

参考文献:

- [1] HUANG Y D, BARKAT M. Near-field multiple source localization by passive sensor array [J]. IEEE Trans on AP, 1991, 39(7): 968-975.
 - [2] ROUQUETTE S, NAJIM M. Estimation of frequencies and damping factors by two-dimensional ESPRIT type methods [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2001, 49(1): 237-245.
 - [3] van der VEEN A J, OBER P B. Azimuth and elevation computation in high resolution DOA estimation [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1992, 40(7): 1828-1832.
 - [4] YEREDOR A. Non-orthogonal joint diagonalization in the least-squares sense with application in blind source separation [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2002, 50(7): 1545-1553.
 - [5] FENG Dazheng, ZHANG Xianda, BAO Zheng. A neural network learning for adaptively extracting cross-correlation features between two high-dimension data streams [J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2004, 15(6): 1541-1554.
 - [6] 张华, 冯大政, 聂卫科, 等. 非正交联合对角化盲源分离算法 [J]. 西安电子科技大学学报, 2008, 35(1): 27-31.
- ZHANG Hua, FENG Dazheng, NIE Weike, et al. Non-orthogonal joint diagonalization for blind source separation [J]. Journal of Xidian University, 2008, 35(1): 27-31.

(编辑 刘杨)